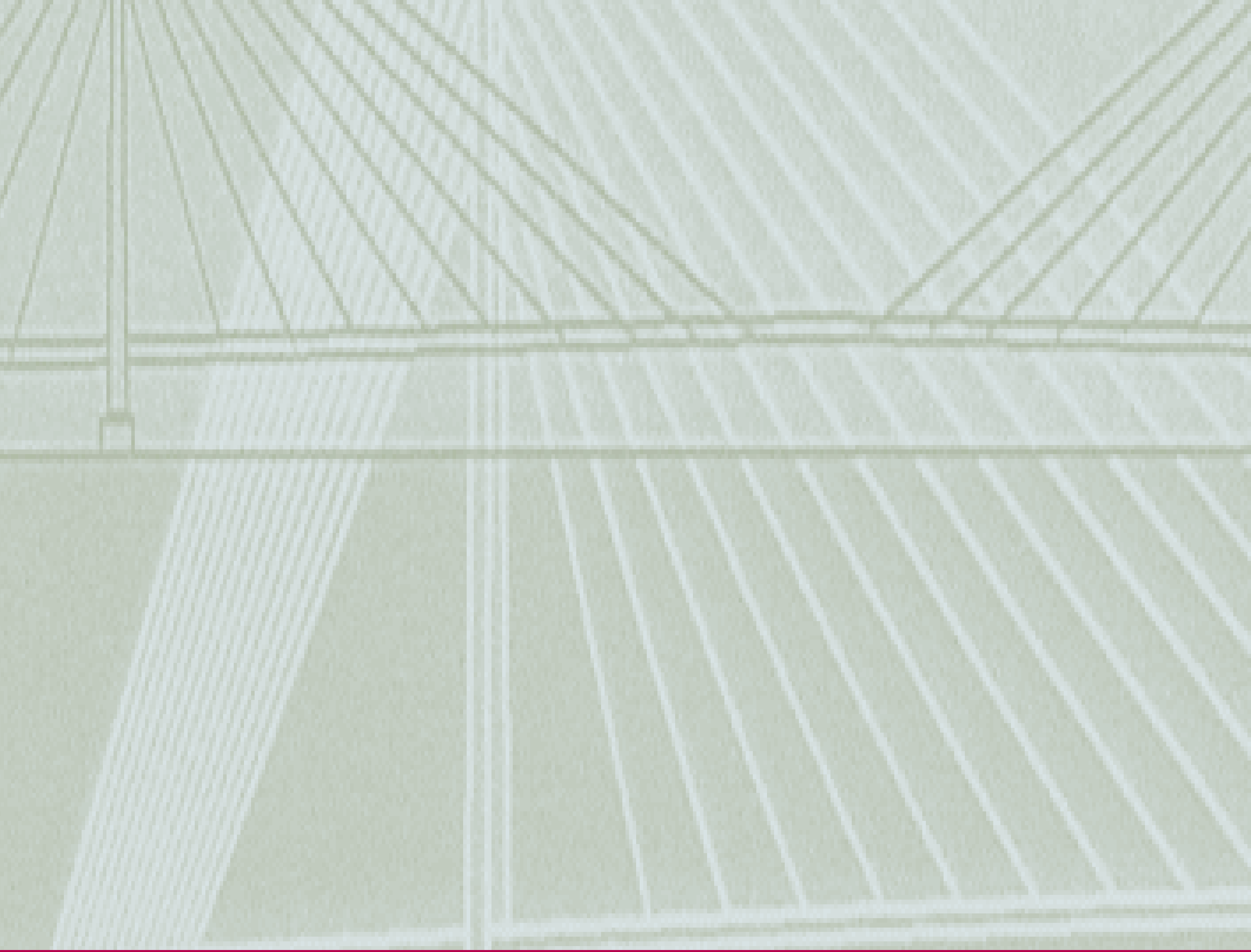
OeNB

Oesterreichische Nationalbank

Leitfadenreihe zum Marktrisiko

Band 4

Berücksichtigung von Optionsrisiken



In der Leitfadenreihe zum Marktrisiko sind erschienen:

Band 1: Allgemeines Marktrisiko bei Schuldtiteln, 2. überarbeitete und erweiterte Auflage

Band 2: Prüfung des Standardverfahrens

Band 3: Begutachtung eines Value at Risk-Modells

Band 4: Berücksichtigung von Optionsrisiken

Band 5: Durchführung von Krisentests

Band 6: Sonstige Risiken des Wertpapier-Handelsbuches

Eigentümer, Herausgeber und Verleger:

Oesterreichische Nationalbank

Für den Inhalt verantwortlich:

Wolfdietrich Grau

Erstellt von:

Abteilung für Finanzmarktanalyse

Satz, Druck und Herstellung:

Hausdruckerei

Internet e-mail:

http://www.oenb.at

Papier:

Salzer Demeter, 100% chlorfrei gebleichter Zellstoff, säurefrei, ohne optische Aufheller

DVR 0031577

Mit dem Inkrafttreten der 2. großen BWG-Novelle per 1. Jänner 1998 wurden die österreichischen Kreditinstitute und die Bankenaufsicht nicht nur mit weitreichenden gesetzlichen Adaptierungen und Anpassungen an internationale Standards konfrontiert, alle Beteiligten standen auch vor einer inhaltlichen Herausforderung, wie sie in der bisherigen Vergangenheit ohne Beispiel war.

Die erfolgreiche Umsetzung dieser äußerst komplexen Gesetzesmaterie stellt einen Quantensprung im Risikomanagement von Banken mit nennenswertem Wertpapierhandel dar, bedeutet aber auch hohe Investitionen in das entsprechende Know-how und in die Ausbildung der damit betrauten Mitarbeiter. Allesamt Faktoren, welche die Professionalität der Akteure steigern und im Spiel der Marktkräfte letztendlich allen Beteiligten zugute kommen.

Die Oesterreichische Nationalbank – einerseits Marktpartner der heimischen Kreditwirtschaft, andererseits mit der Durchführung bankaufsichtlicher Aufgaben betraut – versteht sich zunehmend als jener Akteur, der Dienstleistungen auf höchstem Niveau anbietet und diese unter Wahrung entsprechender Transparenz allen Beteiligten zur Verfügung stellt.

Die vorliegende Leitfadenreihe besteht aus sechs Bänden: Je ein Leitfaden ist dem Begutachtungsverfahren eines Value at Risk-Modells und dem Prozedere bei der Überprüfung der Standard-Marktrisikobestimmungen durch die Oesterreichische Nationalbank gewidmet. Vier weitere Bände setzen sich ausführlich mit der Thematik zur Durchführung von Krisentests für Wertpapier-Portfeuilles, der Berechnung und Berücksichtigung des Eigenmittelerfordernisses von Optionsrisiken, des allgemeinen Zinsrisikos bei Schuldtiteln und den sonstigen Risiken (Ausfalls-, Abwicklungsrisiko etc.) auseinander.

Die Publikation dieser Leitfadenreihe ist als Arbeitserleichterung/Service für den Finanzsektor gedacht. Die Leitfäden bringen zusätzlich Transparenz und Objektivität in die Prüfverfahren. Die von der Oesterreichischen Nationalbank gewählte Vorgangsweise stärkt somit das Vertrauen in den heimischen Finanzplatz und trägt – vor dem Hintergrund weltweiter Liberalisierung – zu dessen Wettbewerbsfähigkeit und Stabilität bei.

Mag. Dr. Gertrude Tumpel-Gugerell

Vize-Gouverneurin
der Oesterreichischen Nationalbank

Der Finanzsektor ist – vielleicht neben der Telekommunikation – einer der sich am dynamischsten entwickelnden Wirtschaftszweige. Dies zeigt sich besonders im Wachstum der derivativen Finanzprodukte, sowohl volumensmäßig gesehen wie auch in der Strukturierung und Komplexität der Instrumente. Gleichzeitig bleibt aber die Anforderung an den Finanzsektor, im speziellen an die Kreditinstitute, unverändert aufrecht: dem Kunden optimale Sicherheit bei seiner Veranlagung zu bieten.

In diesem Punkt ist auch die Bankenaufsicht gefordert: Sie muss in ihren Mitteln und Wegen der Zielerreichung so flexibel sein, dass sie auf neue Finanzprodukte und neue Risiken rasch reagieren kann. Äußeres Zeichen dieser Herausforderung sind neue bzw. novellierte EU-Richtlinien und dadurch induzierte BWG-Novellen. Kaum scheinen große Projekte wie die Marktrisikobegrenzung über die Kapitaladäquanz-Richtlinie und die CAD II vor dem Abschluss, steht die Herausforderung des derzeit intensiv diskutierten neuen capital accord des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht zur Bewältigung an. Dieser wird neben neuen Kapitalanforderungen auch eine umfassende Betrachtung der Risikopositionen eines Kreditinstitutes durch die Aufsicht mit sich bringen.

Viele Ansätze und Hinweise für das Risikomanagement der Marktrisiken, die in die Leitfadenreihe der Oesterreichischen Nationalbank Eingang gefunden haben, sind in Blickrichtung des Basler Ausschusses nicht beschränkt auf das Wertpapier-Handelsbuch zu sehen. Auch das traditionelle Bankgeschäft beinhaltet Zins-, Kurs- und Optionsrisiken, nur werden diese auf den ersten Blick nicht so sichtbar.

Dennoch oder gerade deshalb haben sich Kreditinstitute mit diesen Themen auseinanderzusetzen und es sollen neben den Handelsbuch-Banken auch jene Institute von der Leitfadenreihe angesprochen werden, die kein großes Wertpapier-Handelsbuch führen. Die umfassende Risikoanalyse – auch der „Marktrisiken“ im Bankbuch – ist Gebot der Stunde und ein funktionierendes Risikomanagement liegt im primären Interesse der Banken selbst. Die Leitfadenreihe der Oesterreichischen Nationalbank soll ein wesentlicher Arbeitsbehelf hiefür sein und intensiv genutzt werden. Gleichzeitig ist sie Ausdruck der Kooperation der Bankenaufsicht im Bundesministerium für Finanzen mit der Oesterreichischen Nationalbank, die hier in einem hochtechnischen Bereich wesentliche Unterstützungsarbeit leistet.

Mag. Alfred Lejsek

Sektionschef
im Bundesministerium für Finanzen

Vorwort

Der vorliegende Leitfaden behandelt die mit Optionen verbundenen Risiken gemäß der Optionsrisikoverordnung und versucht anhand von zahlreichen Beispielen und einem Musterportfolio, die Berechnung des aus den Optionsrisiken entstehenden Eigenmittelerfordernisses für das Handelsbuch im Rahmen der Standardmethode zu erläutern.

Abschnitt 1 gibt einen Überblick über die gesetzlichen Rahmenbedingungen, stellt die wichtigsten mit Optionen verbundenen Risiken für eine Option vor und zeigt, wie man diese Risiken im Rahmen der Optionsrisikoverordnung aggregiert.

Abschnitt 2 ist den Optionsbewertungsmodellen und den Sensitivitäten gewidmet. Im ersten Teil werden das weit verbreitete Modell von Black und Scholes für europäische Optionen sowie die analytische Approximation von Barone-Adesi und Whaley und die numerische Binomialbaum-Methode für amerikanische Optionen besprochen. Der zweite Teil des Abschnittes erläutert die analytische und numerische Berechnung der Sensitivitäten sowie die Bestimmung der aktuellen Volatilität als einer der wichtigsten Inputparameter für jedes Optionsbewertungsmodell.

Abschnitt 3 enthält zahlreiche Beispiele zu den verschiedenen Optionstypen. Jede Option wird mit den in Abschnitt 2 vorgestellten Modellen in nachvollziehbarer Weise bewertet, die Sensitivitäten werden ermittelt und schließlich das Gamma- und das Vega-Risiko für jede Optionsposition basierend auf der Laufzeitbandmethode bestimmt.

In Abschnitt 4 werden die Optionspositionen des vorigen Abschnitts zu einem Musterportfolio zusammengefaßt. Für dieses Portfolio wird zuerst der Gamma- bzw. Vega-Effekt pro Risikokategorie und dann der Gamma- bzw. Vega-Effekt für das gesamte Portfolio ermittelt.

An dieser Stelle möchten wir uns bei Gerhard Coosmann, Markus Fulmek, Gerald Krenn und Ronald Laszlo für ihre Kommentare, Diskussionen und wertvollen Anregungen bedanken. Ganz besonderer Dank gilt unserer Abteilungsleiterin Helga Mramor, deren Engagement entscheidenden Einfluß auf das Zustandekommen der gesamten Leitfadenreihe hatte.

Wien, September 1999

Annemarie Gaal
Manfred Plank

Inhaltsverzeichnis

1 Gesetzlicher Rahmen

Kreditinstitute, die kein internes Modell verwenden, um Optionen ihres Handelsbuches mit Eigenmitteln zu unterlegen, können das Eigenmittelerfordernis des mit Optionen verbundenen allgemeinen Positionsrisikos nach § 22e Abs 2 BWG und § 22e Abs 3 BWG in Zusammenhang mit der Optionsrisikoverordnung berechnen. Das Ausfallrisiko von OTC-Optionen wird in § 22o BWG geregelt. Näheres zum Ausfallrisiko findet man im Band 6 der Leitfadenreihe zum Marktrisiko „Sonstige Risiken des Wertpapier-Handelsbuches" (Plank, 1999). § 22e Abs 2 BWG regelt die Erfassung des Deltarisikos, § 22e Abs 3 BWG in Zusammenhang mit der Optionsrisikoverordnung dagegen die Berechnung der sonstigen mit Optionen verbundenen Risiken. Die Optionsrisikoverordnung stellt ein vereinfachtes Verfahren dar, um die sonstigen mit Optionen verbundenen Risiken bei der Eigenmittelunterlegung des Handelsbuches zu erfassen. Dabei ist für jede Optionsposition, also auch für Absicherungspositionen, das Gamma-Risiko und das Vega-Risiko gesondert zu berechnen. Die für die einzelnen Berechnungen verwendeten Optionsbewertungsmodelle sind gemäß den Bestimmungen des BWG der Bankenaufsicht anzuzeigen.

Für die Berechnung des gesamten Gamma- und Vega-Risikos eines Optionenportfolios werden die einzelnen Positionen zu sogenannten Risikokategorien zusammengefaßt. Nur innerhalb dieser Risikokategorien dürfen die Gamma- bzw. die Vega-Effekte einzelner Positionen gegeneinander aufgerechnet werden. Bei Optionen auf

- Fremdwährungen und Gold ist jedes Währungspaar und Gold eine Risikokategorie;

- Substanzwerte sind die Substanzwerte sämtlicher Märkte eines Staates eine Risikokategorie. Notiert ein Substanzwert auf Börsen in mehreren Staaten, ist jeweils der Hauptmarkt maßgeblich; dieser kann nach den Kriterien des gehandelten Volumens oder des Sitzes der Gesellschaft festgelegt werden;

- Anleihen und Zinssätze ist, getrennt nach Währungen des Basisinstruments, jedes Laufzeitband der Tabelle I für die Laufzeitbandmethode bzw. jede Zone der Tabelle II bei der Durationsmethode eine Risikokategorie.[1] Dabei ist folgendes zu beachten: Wird das allgemeine Positionsrisiko in Schuldtiteln gemäß § 22h Abs 2 BWG laufzeitbezogen ermittelt, so sind für Basisinstrumente mit einem Nominalzinssatz von 3% oder mehr die Laufzeitbänder der Spalte 2 und für Basisinstrumente mit einem Nominalzinssatz geringer als 3% die Laufzeitbänder der Spalte 3 der Tabelle I zu verwenden.[2] Für die Einordnung der einzelnen Optionen in die entsprechenden Laufzeitbänder ist, bei Vorhandensein von mehr als einer Laufzeit des Basisinstruments (z.B. bei Swaptions, Caplets und Floorlets), stets die längere

[1] *Die Optionsrisikoverordnung wird entsprechend adaptiert.*
[2] *Die Optionsrisikoverordnung wird entsprechend adaptiert.*

der beiden Laufzeiten zu nehmen, wobei eine eventuelle Vorlaufzeit hinzugerechnet werden muß.

Zonen	**Laufzeitbänder**		**Gewicht (in %)**	**Angenommene Zinssatzänderung (in %)**	**Kodierung**
	Nominalzinssatz von 3% oder mehr	**Nominalzinssatz geringer als 3%**			
Spalte (1)	**Spalte (2)**	**Spalte (3)**	**Spalte (4)**	**Spalte (5)**	**Spalte (6)**
Zone (1)	bis 1 Monat über 1 bis 3 Monate über 3 bis 6 Monate über 6 bis 12 Monate	bis 1 Monat über 1 bis 3 Monate über 3 bis 6 Monate über 6 bis 12 Monate	0,00 0,20 0,40 0,70	-- 1,00 1,00 1,00	1 2 3 4
Zone (2)	über 1 bis 2 Jahre über 2 bis 3 Jahre über 3 bis 4 Jahre	über 1 bis 1,9 Jahre über 1,9 bis 2,8 Jahre über 2,8 bis 3,6 Jahre	1,25 1,75 2,25	0,90 0,80 0,75	5 6 7
Zone (3)	über 4 bis 5 Jahre über 5 bis 7 Jahre über 7 bis 10 Jahre über 10 bis 15 Jahre über 15 bis 20 Jahre über 20 Jahre	über 3,6 bis 4,3 Jahre über 4,3 bis 5,7 Jahre über 5,7 bis 7,3 Jahre über 7,3 bis 9,3 Jahre über 9,3 bis 10,6 Jahre über 10,6 bis 12,0 Jahre über 12,0 bis 20,0 Jahre über 20 Jahre	2,75 3,25 3,75 4,50 5,25 6,00 8,00 12,50	0,75 0,70 0,65 0,60 0,60 0,60 0,60 0,60	8 9 10 11 12 13 14 15

Tabelle I: Laufzeitbandmethode (§ 22h Abs 2 BWG)

Zone	Modifizierte Duration	Angenommene Zinssatzänderung (in %)
1	0 bis 1,0	1,0
2	über 1,0 bis 3,6	0,85
3	über 3,6	0,7

Tabelle II: Durationsmethode (§ 22h Abs 3 BWG)

Nach dem BWG ist das Delta-, Gamma- und Vega-Risiko von Optionen mit Eigenmitteln zu unterlegen.

1.1 Delta-Risiko

Das Delta δ einer Option gibt die Änderung des Optionspreises im Verhältnis zu einer geringen Preisschwankung des Basisinstruments an. Mathematisch wird der Delta-Wert als erste partielle Ableitung der Optionspreisfunktion nach dem Basisinstrument berechnet. Zur Erfassung des Delta-Risikos einer Option auf ein Basisinstrument ist diese wie eine Position zu behandeln, deren Wert dem Wert des delta-gewichteten Basisinstruments entspricht. Das delta-gewichtete Basisinstrument ist dann gemäß § 22a bis § 22o BWG mit Eigenmitteln zu unterlegen, wobei derivative Basisinstrumente gemäß § 22e BWG zuvor in ihre Bestandteile zu zerlegen sind. Näheres zur Zerlegung von Zinsinstrumenten findet man in Band 1 der Leitfadenreihe zum Marktrisiko „Allgemeines Marktrisiko bei Schuldtiteln, 2. überarbeitete und erweiterte Auflage" (Coosmann und Laszlo, 1999).

1.2 Gamma-Risiko

1.2.1 Gamma-Effekt einer Option

Das Gamma γ einer Option gibt die relative Veränderung des Delta-Wertes bei einer kleinen Preisschwankung des Basisinstruments an. Mathematisch wird der Gamma-Wert als die zweite partielle Ableitung der Optionspreisfunktion nach dem Basisinstrument berechnet. Zur Erfassung des Gamma-Risikos einer Option ist der sogenannte „Gamma-Effekt" zu berechnen, der sich aus einer Taylorreihenentwicklung der Optionspreisfunktion ergibt:

$$Gamma - Effekt = \frac{1}{2} \cdot Volumen \cdot \gamma \cdot (\Delta B)^2 . \tag{1.1}$$

ΔB bezeichnet die vorausgesetzte Preisschwankung des Basisinstruments, und das Volumen wird, wie unten erläutert, nach den einzelnen Kategorien spezifiziert.

Die Optionsrisikoverordnung unterteilt die Optionen in vier Klassen:

- Optionen auf Substanzwerte
- Optionen auf Fremdwährungen und Gold
- Optionen auf Zinssätze
- Optionen auf Anleihen

Die Spezifikation des Volumens und der Preisschwankung des Basisinstruments ΔB ist der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen, wobei der Gewichtungsfaktor 0,04 bei eng verbundenen Währungen und 0,08 bei nicht eng verbundenen Währungen zu verwenden ist.

	Aktien	**Fremdwährungen**	**Zinssätze**	**Anleihen**
Volumen	Stückzahl	Nominale	Nominale	Nominale/100
ΔB Lfzb.-Meth.	Marktpreis x 0,08	Marktpreis x 0,08 bzw. 0,04	Zinssatzänderung aus der Spalte 5 der Tabelle I	Gewicht aus der Spalte 4 der Tabelle I x Forward-Preis der Anleihe[3]
ΔB Dur.-Meth.	Marktpreis x 0,08	Marktpreis x 0,08 bzw. 0,04	Zinssatzänderung aus der Spalte 3 der Tabelle II	Duration x Zinssatzänderung aus der Spalte 3 der Tabelle II x Forward-Preis der Anleihe

Tabelle III: Spezifikation des Volumens und der Veränderung des Basisinstruments

Den in den Tabellen I, II und III getroffenen Annahmen über die Veränderung des Basisinstruments liegen unveröffentlichte statistische Untersuchungen des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht zugrunde. Tabelle III kommt auch bei der Berechnung der Eigenmittel nach der Laufzeitbandmethode gemäß § 22h BWG zur Anwendung.

1.2.2 Aggregation der Gamma-Effekte

Bei der Berechnung der Eigenmittelunterlegung des Gamma-Risikos eines Optionsportfolios sind zunächst die einzelnen Gamma-Effekte innerhalb einer Risikokategorie zu addieren, sodaß sich für jede Risikokategorie entweder ein positiver oder ein negativer Netto-Gamma-Effekt ergibt. Das Eigenmittelerfordernis für das Gamma-Risiko ist dann der Absolutbetrag der Summe aller negativen Netto-Gamma-Effekte. Positive Netto-Gamma-Effekte bleiben dabei unberücksichtigt.

[3] *Unter dem Forward-Preis der Anleihe versteht man den Wert der Anleihe zum Ausübungszeitpunkt der Option aus heutiger Sicht.*

1.3 Vega-Risiko

1.3.1 Vega-Effekt einer Option

Das Vega Λ einer Option gibt die Änderung des Optionspreises im Verhältnis zu einer geringen Schwankung der Volatilität des Basisinstruments an. Mathematisch wird der Vega-Wert als die erste partielle Ableitung der Optionspreisfunktion nach der Volatilität berechnet. Zur Erfassung des Vega-Risikos einer Option ist der sogenannte „Vega-Effekt“ zu berechnen, der sich aus einer Taylorreihenentwicklung der Optionspreisfunktion ergibt:

$$Vega - Effekt = Volumen \cdot \Lambda \cdot \frac{Volatilität}{4} \,. \tag{1.2}$$

Hierbei wird angenommen, daß die Veränderung der aktuellen Volatilität - die als **Dezimalzahl** anzugeben ist - ein Viertel derselben ist[4].

1.3.2 Aggregation der Vega-Effekte

Bei der Berechnung der Eigenmittelunterlegung des Vega-Risikos eines Optionsportfolios sind zunächst die einzelnen Vega-Effekte innerhalb einer Risikokategorie zu addieren, sodaß sich für jede Risikokategorie entweder ein positiver oder ein negativer Netto-Vega-Effekt ergibt. Das Eigenmittelerfordernis für das Vega-Risiko ist dann die Summe der Absolutbeträge aller Netto-Vega-Effekte.

1.4 Anhang: Taylorreihenentwicklung

Die mathematische Grundlage der in der Optionsrisikoverordnung verwendeten Formeln für den Gamma- und Vega-Effekt ist die Tatsache, daß unter bestimmten Voraussetzungen der Wert einer Funktion, die von mehreren Variablen $x_1,\dots,x_n$ abhängt, in einer kleinen Umgebung von $x_1,\dots,x_n$ durch eine Polynomfunktion gut approximiert werden kann. Die Koeffizienten dieser Polynomfunktion sind durch die partiellen Ableitungen der Funktion an der Stelle $x_1,\dots,x_n$ gegeben. Formal wird dies wie folgt beschrieben:

[4] *Es wird darauf hingewiesen, daß einige Softwaresysteme Vega ausgehend von einer Veränderung der Volatilität um einen Prozentpunkt berechnen. In diesem Fall muß Vega mit dem Faktor 100 multipliziert werden, ehe die Formel (1.2) angewendet wird.*

$$f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n)=\sum_{|a|\le k}\frac{\partial^{|a|}f(x_1,\dots,x_n)}{a_1!\cdots a_n!}h_1^{a_1}\cdots h_n^{a_n}+R(h_1,\dots,h_n),$$

wobei $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ und $R(h_1,\dots,h_n)$ ein Restglied ist, das in der Regel vernachlässigt werden kann. Bezeichnet etwa $c(S,X,r,T,d,\sigma)$ den Preis einer Aktienoption, wobei das Basisinstrument den Preis S hat, der mit der Volatilität σ schwankt, der Strike-Preis X ist, der risikolose Zinssatz für die Restlaufzeit T der Option r beträgt und die Aktie eine Dividendenrendite d hat, so erhält man:

$$c(S+\Delta S, X+\Delta X r+\Delta r, T+\Delta T d+\Delta d, \sigma+\Delta\sigma)-c(S,X,r,T,d,\sigma)=$$
$$\frac{\partial c(S,X,r,T,d,\sigma)}{\partial S}\Delta S+\cdots+\frac{\partial c(S,X,r,T,d,\sigma)}{\partial \sigma}\Delta\sigma+\frac{\partial^2 c(S,X,r,T,d,\sigma)}{\partial S^2}(\Delta S)^2+\cdots+R$$

Die Optionsrisikoverordnung nimmt nun an, daß in dieser Approximation alle Terme bis auf den Delta-, Gamma- und Vega-Term vernachlässigt werden können. Damit ergibt sich für die Veränderung des Optionspreises folgende Approximation:

$$c(S+\Delta S, X+\Delta X r+\Delta r, T+\Delta T d+\Delta d, \sigma+\Delta\sigma)-c(S,X,r,T,d,\sigma)\approx$$
$$\frac{\partial c(S,X,r,T,d,\sigma)}{\partial S}\Delta S+\frac{\partial^2 c(S,X,r,T,d,\sigma)}{\partial S^2}(\Delta S)^2+\frac{\partial c(S,X,r,T,d,\sigma)}{\partial \sigma}\Delta\sigma$$

Die Optionsrisikoverordnung ist damit nur auf jene Optionen anwendbar, für die diese Approximation Gültigkeit hat. Dies ist für alle Standardoptionen der Fall, nicht jedoch für exotische Optionen, wie z.B. Binary-Optionen oder Barrier-Optionen. Für solche Optionen müssen verfeinerte Verfahren zur Risikomessung und zur Berechnung der Eigenmittelunterlegung herangezogen werden.

Die eben beschriebene Approximation einer Funktion durch eine Polynomfunktion wird (in der Fachliteratur) als Taylorreihenentwicklung der Funktion bezeichnet. Unter welchen Voraussetzungen eine gegebene Funktion in eine Taylorreihe entwickelt werden kann, findet man z.B. in Heuser 1990.

2 Optionsbewertungsmodelle und Sensitivitäten

2.1 Das Modell von Black-Scholes für europäische Optionen

Black und Scholes waren die ersten, die zeigen konnten, daß Standard-Put- und Call-Optionen bewertet werden können, indem sie durch ein Portfolio aus dem Basisinstrument und einer Geldeinlage zum risikolosen Zinssatz repliziert werden. Dabei muß dieses Portfolio kontinuierlich an die aktuellen Marktbedingungen angepaßt werden. Das klassische Modell von Black und Scholes (1973) konnte nur europäische Put- und Call-Optionen auf Basisinstrumente, die keine Cashflows generieren, wie z.B. Aktien ohne Dividenden, bewerten. Es ist jedoch leicht möglich, das Modell so zu verallgemeinern, daß auch europäische Optionen auf Basisinstrumente mit Cashflows, wie Aktien mit Dividenden, Fremdwährungen und Futures, bewertet werden können. Diese verallgemeinerte Version des Modells liefert die folgenden Preisfunktionen für europäische Call- und Put-Optionen:

$$c = e^{(b-r)T} SN(d_1) - e^{-rT} XN(d_2), \tag{2.1}$$

$$p = e^{-rT} XN(-d_2) - e^{(b-r)T} SN(-d_1), \tag{2.2}$$

wobei

$$d_1 = \frac{ln(S/X) + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

c	Preis der Call-Option
p	Preis der Put-Option
S	Aktueller Kurs des Basisinstruments
X	Strike-Preis
r	Risikoloser Zinssatz
T	Restlaufzeit der Option in Jahren
σ	Volatilität des Basisinstruments
$N(x)$	Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung an der Stelle x
b	Haltekosten der Option[5]

Abhängig vom Basisinstrument ergeben sich verschiedene Haltekosten der Option.

[5] *Kosten sind entgangene Erträge und werden deshalb in derselben Einheit ausgedrückt.*

2.1.1 Optionen auf Basisinstrumente ohne Cashflows

In diesem Fall muß $b = r$ gesetzt werden. Die Formeln (2.1) und (2.2) haben dann die folgende Gestalt und ergeben das klassische Modell von Black-Scholes (1973):

$$c = SN(d_1) - e^{-rT} XN(d_2)\,, \tag{2.3}$$

$$p = e^{-rT} XN(-d_2) - SN(-d_1)\,, \tag{2.4}$$

wobei

$$d_1 = \frac{ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\,,$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}\,.$$

Mit diesem Modell können europäische Optionen auf Aktien ohne Dividenden und Aktienindizes ohne Dividenden (sogenannte Kursindizes) bewertet werden.

2.1.2 Optionen auf Aktien und Aktienindizes mit bekannten Dividendenrenditen

Merton (1973) erweiterte das klassische Black-Scholes-Modell derart, daß auch europäische Put- und Call-Optionen auf Aktien und Aktienindizes mit einer bekannten Dividendenrendite q bewertet werden können. In diesem Fall sind die Haltekosten b in den Formeln (2.1) und (2.2) durch $r - q$ gegeben, und man erhält die folgenden Preisfunktionen:

$$c = e^{-qT} SN(d_1) - e^{-rT} XN(d_2)\,, \tag{2.5}$$

$$p = e^{-rT} XN(-d_2) - e^{-qT} SN(-d_1)\,, \tag{2.6}$$

wobei

$$d_1 = \frac{ln(S/X) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\,,$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}\,.$$

2.1.3 Optionen auf Fremdwährungen

Garman und Kohlhagen (1983) modifizierten das klassische Black-Scholes-Modell so, daß damit europäische Fremdwährungsoptionen bewertet werden können. Das Modell entspricht dem Merton-Modell, mit dem einzigen Unterschied, daß die Dividendenrendite durch den risikolosen Zinssatz der Fremdwährung, r_f, zu ersetzen ist. In diesem Fall ist $b = r - r_f$.

Die Preisfunktionen lauten:

$$c = e^{-r_f T} SN(d_1) - e^{-rT} XN(d_2) \tag{2.7}$$

$$p = e^{-rT} XN(-d_2) - e^{-r_f T} SN(-d_1) \tag{2.8}$$

wobei

$$d_1 = \frac{ln(S/X) + (r - r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

2.1.4 Optionen auf Futures

Black (1976) erweiterte das klassische Black-Scholes-Modell derart, daß europäische Optionen auf Forward- bzw. Future-Kontrakte und Anleihen mit dem aktuellen Forward- bzw. Future-Preis F bewertet werden können. In diesem Fall ist $b = 0$ zu setzen und man erhält:

$$c = e^{-rT} FN(d_1) - e^{-rT} XN(d_2), \tag{2.9}$$

$$p = e^{-rT} XN(-d_2) - e^{-rT} FN(-d_1), \tag{2.10}$$

wobei

$$d_1 = \frac{ln(F/X) + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

2.1.5 Caps und Floors

Um einen europäischen Cap (Floor) bewerten zu können, wird dieser in ein Portfolio von Caplets (Floorlets) zerlegt. Mit dem Modell von Black (1976) kann das *k*-te Caplet (Floorlet) wie folgt bewertet werden:

$$caplet = \frac{\tau}{1+\tau F_k} e^{-rk\tau} \left[F_k N(d_1) - XN(d_2) \right], \tag{2.11}$$

$$floorlet = \frac{\tau}{1+\tau F_k} e^{-rk\tau} \left[XN(-d_2) - F_k N(-d_1) \right], \tag{2.12}$$

wobei

$$d_1 = \frac{ln(F_k / X) + (\sigma_k^{\,2}/2)k\tau}{\sigma_k \sqrt{k\tau}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_k \sqrt{k\tau}.$$

τ bezeichnet die in Jahren ausgedrückte Zinszahlungsperiode des *k*-ten Caplets (Floorlets) und F_k den Forward-τ-Jahreszinssatz p.a. der Periode $[k\tau, (k+1)\tau]$.

Die obigen Formeln basieren auf einem Nominale von 1. Bei der Berechnung der Sensitivitäten eines Caplets (Floorlets) nach der Optionsrisikoverordnung ist der Forward-Zinssatz als Basisinstrument zu nehmen (und nicht das Forward Rate Agreement, das ja eigentlich das Basisinstrument des Caplets [Floorlets] wäre), weil diese Option der Risikokategorie „Zinssätze“ zuzuordnen ist.

2.1.6 Swaptions

Mit einer geringfügigen Modifikation des Modells von Black (1976) kann man europäische Swaptions wie folgt bewerten:

$$\text{Payer-Swaption: } c = A[FN(d_1) - XN(d_2)], \tag{2.13}$$

$$\text{Receiver-Swaption: } p = A[XN(-d_2) - FN(-d_1)], \tag{2.14}$$

wobei

$$d_1 = \frac{ln(F/X) + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$$A = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{mn} e^{-r_i t_i} \ .$$

n bezeichnet die in Jahren ausgedrückte Laufzeit des Swaps, der in T Jahren beginnt, m die Anzahl der Kuponzahlungen pro Jahr, t_i die Zeit bis zum i-ten Kupontermin und r_i den dazugehörigen risikolosen Zinssatz.

Die obigen Formeln basieren auf einem Nominale von 1. Bei der Berechnung der Sensitivitäten einer Swaption nach der Optionsrisikoverordnung ist der Forward-Zinssatz als Basisinstrument zu nehmen (und nicht der Swap, der ja eigentlich das Basisinstrument der Option wäre), weil diese Option der Risikokategorie „Zinssätze“ zuzuordnen ist.

2.2 Barone-Adesi und Whaley-Approximation

Im Gegensatz zu europäischen Optionen können amerikanische Optionen jederzeit während der Laufzeit der Option ausgeübt werden. Dieser zusätzliche Freiheitsgrad erschwert die Bewertung amerikanischer Optionen. Bis auf eine Ausnahme[6] ist es nicht möglich, amerikanische Optionen über eine analytisch geschlossene Formel zu bewerten. Es gibt jedoch verschiedene analytische Approximationen für amerikanische Standard-Put- und -Call-Optionen, wie z.B. das Approximationsverfahren von Barone-Adesi und Whaley (1987). Hierbei handelt es sich um eine quadratische Approximation, die schnell und für die meisten praktischen Anwendungen ausreichend genau ist.

Amerikanischer Call:

$$c_{BAW} = \begin{cases} c + A_2\left(S/S^*\right)^{q_2} & falls \;\; S < S^* \\ S - X & falls \;\; S \geq S,^* \end{cases} \tag{2.15}$$

wobei

c Call-Preis aus dem entsprechenden Black-Scholes-Modell,

[6] *Das Modell von Black-Scholes kann zur Bewertung von amerikanischen Call-Optionen auf Basisinstrumente ohne Cashflows herangezogen werden, da es in diesem Fall nicht optimal ist, die Option vorzeitig auszuüben.*

$$A_2 = \frac{S^*}{q_2}\left\{1 - e^{(b-r)T} N\left(d_1\left(S^*\right)\right)\right\},$$

$$d_1\left(S^*\right) = \frac{ln\left(S^*/X\right) + \left(b + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$q_2 = \frac{-(L-1) + \sqrt{(L-1)^2 + 4M/K}}{2},$$

$$M = \frac{2r}{\sigma^2},$$

$$L = \frac{2b}{\sigma^2},$$

$$K = 1 - e^{-rT}.$$

Die Variable S^* ist der kritische Preis des Basisinstruments, oberhalb welchem die Option ausgeübt werden sollte. Dieser Wert ist die Lösung der folgenden nichtlinearen Gleichung:

$$S^* - X = c\left(S^*\right) + \left\{1 - e^{(b-r)T} N\left(d_1\left(S^*\right)\right)\right\}\frac{S^*}{q_2}$$

Die Gleichung muß numerisch, z. B. mit dem Newton-Verfahren, gelöst werden. Barone-Adesi und Whaley (1987) schlagen für die iterative Lösung folgenden Startwert vor:

$$S_1^* = X + \left[S^*(\infty) - X\right]\left[1 - e^{h_2}\right]$$

wobei

$$h_2 = -\left(bT + 2\sigma\sqrt{T}\right)\left[\frac{X}{S^*(\infty) - X}\right],$$

$$S^*(\infty) = \frac{X}{1 - 2\left[-(L-1) + \sqrt{(L-1)^2 + 4M}\right]^{-1}}.$$

Amerikanischer Put:

$$p_{BAW} = \begin{cases} p + A_1 \left(S/S^{**}\right)^{q_1} & falls \;\; S > S^{**} \\ S - X & falls \;\; S \leq S^{**} \end{cases} , \tag{2.16}$$

wobei

p Put-Preis aus dem entsprechenden Black-Scholes-Modell,

$$A_1 = -\frac{S^{**}}{q_1}\left\{1 - e^{(b-r)T} N\left(-d_1\left(S^{**}\right)\right)\right\},$$

$$d_1\left(S^{**}\right) = \frac{ln\left(S^{**}/X\right) + \left(b + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$q_1 = \frac{-(L-1) - \sqrt{(L-1)^2 + 4M/K}}{2},$$

$$M = \frac{2r}{\sigma^2},$$

$$L = \frac{2b}{\sigma^2},$$

$$K = 1 - e^{-rT}.$$

Die Variable S^{**} ist der kritische Preis des Basisinstruments, unterhalb welchem die Option ausgeübt werden sollte. Dieser Wert ist die Lösung der folgenden nichtlinearen Gleichung:

$$X - S^{**} = p\left(S^{**}\right) - \left\{1 - e^{(b-r)T} N\left(-d_1\left(S^{**}\right)\right)\right\}\frac{S^{**}}{q_1}.$$

Die Gleichung muß numerisch, z. B. mit dem Newton-Verfahren, gelöst werden. Barone-Adesi und Whaley (1987) schlagen für die iterative Lösung folgenden Startwert vor:

$$S_1^{**} = S^{**}(\infty) + \left[X - S^{**}(\infty)\right]e^{h_1},$$

wobei

$$h_1 = \left(bT - 2\sigma\sqrt{T}\right)\left[\frac{X}{X - S^{**}(\infty)}\right],$$

$$S^{**}(\infty) = \frac{X}{1 - 2\left[-(L-1) - \sqrt{(L-1)^2 + 4M}\right]^{-1}}.$$

2.3 Binomialbäume

Die Binomialbaum-Methode wurde erstmals von Cox, Ross und Rubinstein (1979) verwendet und ist eines der weitest verbreiteten numerischen Verfahren zur Bewertung von amerikanischen Optionen. Dieses Verfahren diskretisiert die geometrische Brownsche Bewegung, die dem zeitstetigen Black-Scholes-Modell zugrundeliegt. Die Restlaufzeit der Option wird in n äquidistante Zeitintervalle der Länge $\Delta t = T/n$ unterteilt. Am Ende eines jeden Zeitintervalls kann der Preis des Basisinstruments zwei verschiedene Werte annehmen. Im Cox, Ross und Rubinstein-Modell steigt der Preis des Basisinstruments mit der Wahrscheinlichkeit π um einen festen Faktor u und fällt mit der Wahrscheinlichkeit $1-\pi$ um den Faktor d. Nach j Zeitschritten kann der Preis des Basisinstruments einen der folgenden $j+1$ Werte annehmen:

$$Su^i d^{j-i}, \quad i = 0,1,\ldots,j,$$

wobei $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ und $j = n,\ldots,0.$

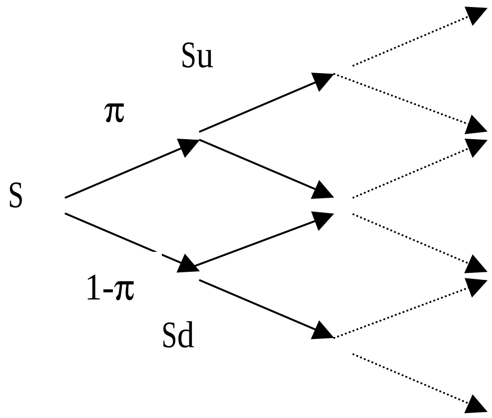
Die Wahrscheinlichkeit π, mit der der Preis des Basisinstruments steigt, ist durch

$$\pi = \frac{e^{b\Delta t} - d}{u - d}$$

gegeben, wobei

$$b = \begin{cases} r & \text{für Optionen auf Aktien und Aktienindizes ohne Dividende} \\ r - q & \text{für Optionen auf Aktien und Aktienindizes mit Dividende} \\ 0 & \text{für Optionen auf Forwards und Futures} \\ r - r_f & \text{für Optionen auf Fremdwährungen} \end{cases}$$

Die Parameter π, u und d sind so gewählt, daß die diskretisierte Zufallsvariable denselben Erwartungswert und dieselbe Varianz wie die stetige Zufallsvariable hat. Damit wird sichergestellt, daß der Binomialbaum die Diskretisierung der geometrischen Brownschen Bewegung ist. Es kann gezeigt werden, daß für $\Delta t \to 0$ das Binomialmodell gegen das zeitstetige Modell von Black und Scholes konvergiert.



Graphik I: Binomialbaum

Der Optionspreis wird rekursiv mit Rückwärts-Induktion wie folgt berechnet:

Call-Option:

$$c_{j,i}^{CRR} = max\left(Su^i d^{j-i} - X, e^{-r\Delta t}\left[\pi\, c_{j+1,i+1}^{CRR} + (1-\pi)\, c_{j+1,i}^{CRR}\right]\right) \qquad (2.17)$$

mit $i = 0,1,\ldots,j$; $j = n-1,\ldots,0$ und $c_{n,i}^{CRR} = max\left(0, Su^i d^{n-i} - X\right)$ mit $i = 0,1,\ldots,n$.

Put-Option:

$$p_{j,i}^{CRR} = max\,(X - Su^i d^{j-i}, e^{-r\Delta t}\left[\pi\, p_{j+1,i+1}^{CRR} + (1-\pi)\, p_{j+1,i}^{CRR}\right] \qquad (2.18)$$

mit $i = 0,1,\ldots,j$; $j = n-1,\ldots,0$ und $p_{n,i}^{CRR} = max\left(0, X - Su^i d^{n-i}\right)$ mit $i = 0,1,\ldots,n$.

Der Fehler des Optionspreises, der durch diese Approximation entsteht, kann vermindert werden, indem man den Preis der amerikanischen Option mit einem Korrekturterm adjustiert. Unter der Annahme, daß der Fehler bei der Bewertung von amerikanischen und europäischen Optionen mittels Binomialbäumen etwa von derselben Größe ist, ist der Korrekturfaktor durch die Differenz des Black-Scholes-Preises und des Binomialbaum-Preises einer europäischen Option gegeben:

$$pr_{A,adj}^{CRR} = pr_A^{CRR} + \left(pr_E^{BS} - pr_E^{CRR}\right), \qquad (2.19)$$

wobei

$pr_{A,adj}^{CRR}$ adjustierter Preis einer amerikanischen Option mit dem Binomialbaum bewertet,

pr_{A}^{CRR} Preis einer amerikanischen Option mit dem Binomialbaum bewertet,

pr_{E}^{BS} Preis der entsprechenden europäischen Option mit dem Modell von Black-Scholes bewertet,

pr_{E}^{CRR} Preis der entsprechenden europäischen Option mit dem Binomialbaum bewertet:

$$pr_E^{CRR} = e^{-rt} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \pi^i (1-\pi)^{n-i} S u^i d^{n-i} .$$

Derartige Korrekturen sind dann notwendig, wenn man einen möglichst exakten Optionspreis benötigt. Dieser ist zum Beispiel für die numerische Berechnung von Sensitivitäten (vor allem Sensitivitäten höherer Ordnung) notwendig.

2.4 Sensitivitäten

Die Sensitivitäten einer Option geben an, wie sich der Optionspreis ändert, wenn sich bestimmte Inputfaktoren geringfügig ändern, unter der Annahme, daß die restlichen Inputfaktoren unverändert bleiben. Mathematisch sind die Sensitivitäten die partiellen Ableitungen der Optionspreisformel nach den einzelnen Inputfaktoren. Falls es nicht möglich ist, Sensitivitäten analytisch zu berechnen, werden diese durch numerische Verfahren approximiert.

2.4.1 Analytische Berechnung der Sensitivitäten

Für die Berechnung der folgenden Sensitivitäten wurden die Optionspreisformeln (2.1) und (2.2) des verallgemeinerten Black-Scholes-Modells für europäische Optionen verwendet.

Delta

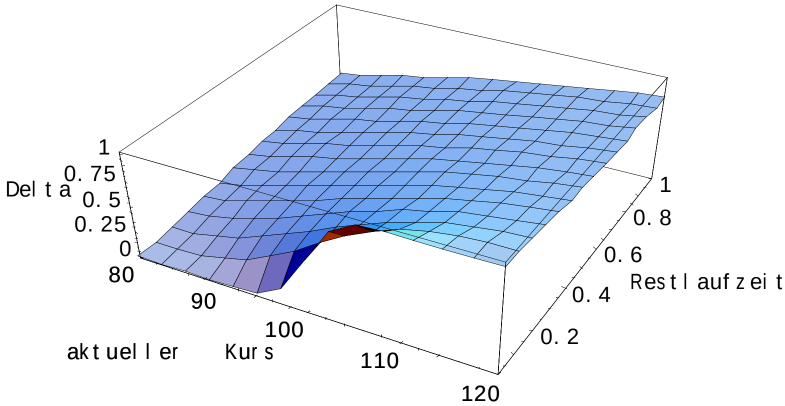
Das Delta einer Option gibt die Veränderung des Optionspreises bei einer geringfügigen Veränderung des Wertes des Basisinstruments an. Mathematisch ist das Delta die erste partielle Ableitung der Optionspreisfunktion nach dem Basisinstrument.

Call:

$$\delta = V \frac{\partial c}{\partial S} = V e^{(b-r)T} N(d_1), \tag{2.20}$$

wobei *V=1* für gekaufte und *V=-1* für verkaufte Optionen ist.

Die nachfolgende Graphik veranschaulicht die Abhängigkeit des Delta einer Call-Option mit Strike 100 vom aktuellen Kurs und von der Restlaufzeit.



Grafik II: Delta einer Call-Option als Funktion des aktuellen Kurses und der Restlaufzeit

Put:

$$\delta = V\frac{\partial p}{\partial S} = Ve^{(b-r)T}\left[N(d_1) - 1\right], \tag{2.21}$$

wobei *V=1* für gekaufte und *V=-1* für verkaufte Optionen ist.

Das Vorzeichen von Delta für gekaufte und verkaufte Call- und Put-Optionen ist in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Long	Short
Call	+	-
Put	-	+

Tabelle IV: Vorzeichen von Delta

Gamma

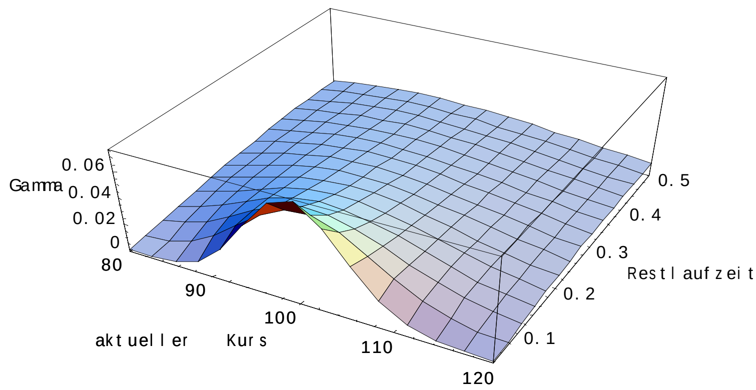
Das Gamma einer Option gibt die Veränderung von Delta bei einer geringfügigen Veränderung des Wertes des Basisinstruments an. Mathematisch ist das Gamma die zweite partielle Ableitung der Optionspreisfunktion nach dem Basisinstrument.

Call, Put:

$$\gamma = V\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = V\frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = V\frac{e^{(b-r)T}n(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}, \tag{2.22}$$

wobei bei gekauften Optionen $V=1$ und bei verkauften Optionen $V=-1$ ist, und $n(x)$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle x bezeichnet.

Die nachfolgende Graphik veranschaulicht die Abhängigkeit des Gamma einer Option mit Strike 100 vom aktuellen Kurs und von der Restlaufzeit.



Grafik III: Gamma einer Option als Funktion des aktuellen Kurses und der Restlaufzeit

Das Vorzeichen von Gamma für gekaufte und verkaufte Call- und Put-Optionen ist in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Long	Short
Call	+	-
Put	+	-

Tabelle V: Vorzeichen von Gamma

Vega

Das Vega einer Option gibt die Veränderung des Optionspreises bei einer geringfügigen Veränderung der Volatilität des Basisinstruments an. Mathematisch ist das Vega die erste partielle Ableitung der Optionspreisfunktion nach der Volatilität des Basisinstruments.

Call, Put:

$$\Lambda = V \frac{\partial c}{\partial \sigma} = V \frac{\partial p}{\partial \sigma} = V \; S e^{(b-r)T} n(d_1) \sqrt{T} \, , \qquad (2.23)$$

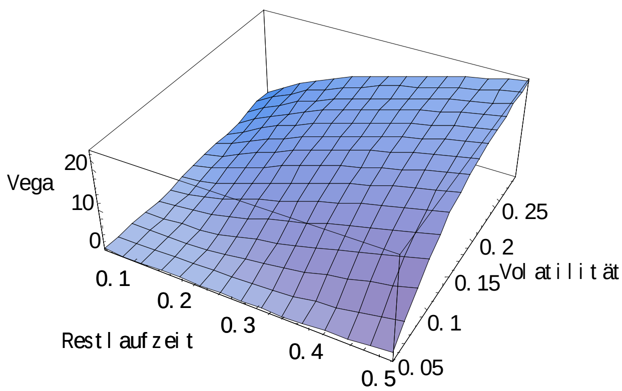
wobei bei gekauften Optionen $V=1$ und bei verkauften Optionen $V=-1$ ist.

Das Vorzeichen von Vega für gekaufte und verkaufte Call- und Put-Optionen ist in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Long	Short
Call	+	-
Put	+	-

Tabelle VI: Vorzeichen von Vega

Die nachfolgende Graphik veranschaulicht die Abhängigkeit des Vega von der aktuellen Volatilität und von der Restlaufzeit.



Grafik IV: Vega einer Option als Funktion der Volatilität und der Restlaufzeit

Theta

Das Theta einer Option gibt die Veränderung des Optionspreises bei einer geringfügigen Veränderung der Restlaufzeit an. Mathematisch ist das Theta die erste partielle Ableitung der Optionspreisfunktion nach der Restlaufzeit der Option.

Call:

$$\theta = V\frac{\partial c}{\partial T} = V\left[-\frac{Se^{(b-r)T}n(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - (b-r)Se^{(b-r)T}N(d_1) - rXe^{-rT}N(d_2)\right], \qquad (2.24)$$

Put:

$$\theta = V\frac{\partial p}{\partial T} = V\left[-\frac{Se^{(b-r)T}n(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + (b-r)Se^{(b-r)T}N(-d_1) + rXe^{-rT}N(-d_2)\right], \qquad (2.25)$$

wobei bei gekauften Optionen $V=1$ und bei verkauften Optionen $V=-1$ ist.

Das Vorzeichen von Theta für gekaufte und verkaufte Call- und Put-Optionen ist in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Long	Short
Call	+/-	+/-
Put	+/-	+/-

Tabelle VII: Vorzeichen von Theta

Rho

Das Rho einer Option gibt die Veränderung des Optionspreises bei einer geringfügigen Veränderung des risikolosen Zinssatzes an. Mathematisch ist das Rho die erste partielle Ableitung der Optionspreisfunktion nach dem risikolosen Zinssatz.

Call:

$$\rho = V\frac{\partial c}{\partial r} = \begin{cases} VTXe^{-rT}N(d_2) & \text{für } b \neq 0 \\ -VTc & \text{für } b = 0, \end{cases} \qquad (2.26)$$

Put:

$$\rho = V\frac{\partial p}{\partial r} = \begin{cases} -VTXe^{-rT}N(-d_2) & \text{für } b \neq 0 \\ -VTp & \text{für } b = 0, \end{cases} \tag{2.27}$$

wobei bei gekauften Optionen $V=1$ und bei verkauften Optionen $V=-1$ ist.

Das Vorzeichen von Rho für gekaufte und verkaufte Call- und Put-Optionen ist in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Long	**Short**
Call	+ falls $b \neq 0$, sonst -	- falls $b \neq 0$, sonst +
Put	-	+

Tabelle VIII: Vorzeichen von Rho

Haltekosten

Die Sensitivität der Haltekosten einer Option gibt die Veränderung des Optionspreises bei einer geringfügigen Veränderung der Haltekosten an. Mathematisch ist die Sensitivität der Haltekosten die erste partielle Ableitung der Optionspreisfunktion nach den Haltekosten.

Call:

$$\beta = V\frac{\partial c}{\partial b} = V\ T\ S\ e^{(b-r)T}N(d_1), \tag{2.28}$$

Put:

$$\beta = V\frac{\partial p}{\partial b} = -V\ T\ S\ e^{(b-r)T}N(-d_1), \tag{2.29}$$

wobei bei gekauften Optionen $V=1$ und bei verkauften Optionen $V=-1$ ist.

Das Vorzeichen der Sensitivität der Haltekosten für gekaufte und verkaufte Call- und Put-Optionen ist in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Long	**Short**
Call	+	-
Put	-	+

Tabelle IX: Vorzeichen der Haltekosten

Sensitivitäten bei Caplets und Floorlets

Die Zins-Sensitivitäten bei Caplets/Floorlets sind die partiellen Ableitungen der Preisformeln (2.11) bzw. (2.12) nach den entsprechenden Variablen.

Zinsdelta bei Caplets[7]:

$$\delta = V\frac{\partial c}{\partial F_k} = V\frac{\tau}{1+\tau F_k}e^{-rk\tau}N(d_1). \tag{2.30}$$

Zinsdelta bei Floorlets[8]:

$$\delta = V\frac{\partial p}{\partial F_k} = V\frac{\tau}{1+\tau F_k}e^{-rk\tau}\left(N(d_1)-1\right). \tag{2.31}$$

Zinsgamma bei Caplets und Floorlets:

$$\gamma = V\frac{\partial^2 c}{\partial F_k^{\,2}} = V\frac{\partial^2 p}{\partial F_k^{\,2}} = V\frac{\tau}{1+F_k}\frac{e^{-rk\tau}n(d_1)}{F_k\sigma\sqrt{k\tau}}. \tag{2.32}$$

Vega bei Caplets und bei Floorlets:

$$\Lambda = V\frac{\partial c}{\partial \sigma} = V\frac{\partial p}{\partial \sigma} = V\frac{\tau}{1+\tau F_k}F_k e^{-rk\tau}n(d_1)\sqrt{k\tau}. \tag{2.33}$$

---

[7] *Zur Bestimmung des δ-gewichteten Forward Rate Agreements (FRAs), das in seine Grundbausteine zerlegt und entsprechend eingestellt werden muß, ist es notwendig, das Zinsdelta in ein Preisdelta umzurechnen. Der aktuelle Preis des FRAs ist durch* $S = \frac{\tau}{1+\tau F_k}e^{-rk\tau}\left[F - X\right]$ *gegeben. Nach der Kettenregel für die Differentiation ergibt sich das folgende Preisdelta:* $\frac{\partial c}{\partial S} = \frac{\frac{\partial c}{\partial F_k}}{\frac{\partial S}{\partial F_k}} = N(d_1)$.

[8] *Analog zu Fußnote 9.*

Sensitivitäten bei Swaptions

Die Zins-Sensitivitäten bei Swaptions sind die partiellen Ableitungen der Preisformeln (2.13) und (2.14) nach den entsprechenden Variablen. Im folgenden bezeichnet A den Ausdruck $A = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m \cdot n} e^{-r_i t_i}$, n die in Jahren ausgedrückte Laufzeit des Swaps, der in T Jahren beginnt, m die Anzahl der Kuponzahlungen pro Jahr, t_i die Zeit bis zum i-ten Kupontermin und r_i den dazugehörigen risikolosen Zinssatz.

Zinsdelta der Payer-Swaption[9]:

$$\delta = V \frac{\partial c}{\partial F} = V \cdot A \cdot N(d_1). \tag{2.34}$$

Zinsdelta der Receiver-Swaption[10]:

$$\delta = V \frac{\partial p}{\partial F} = V \cdot A \cdot (N(d_1) - 1). \tag{2.35}$$

Zinsgamma der Payer- bzw. Receiver-Swaption:

$$\gamma = V \frac{\partial^2 c}{\partial F^2} = V \frac{\partial^2 p}{\partial F^2} = V \cdot A \cdot \frac{n(d_1)}{F \sigma \sqrt{T}} . \tag{2.36}$$

Vega der Payer- bzw. Receiver-Swaption:

$$\Lambda = V \frac{\partial c}{\partial \sigma} = V \frac{\partial p}{\partial \sigma} = V \cdot A \cdot F \cdot n(d_1)\sqrt{T} . \tag{2.37}$$

[9] *Analog zu Fußnote 9.*
[10] *Analog zu Fußnote 9.*

2.4.2 Numerische Berechnung der Sensitivitäten

Lassen sich die Sensitivitäten nicht analytisch berechnen, wie dies bei der Bewertung von Optionen mittels der Barone-Adesi und Whaley-Approximation oder dem Cox-Ross-Rubinstein-Modell der Fall ist, dann muß man auf numerische Differentiationsverfahren zurückgreifen. Hierbei wird die Ableitung durch Bilden von Differenzenquotienten approximiert.

Delta

Um das Delta einer Option numerisch zu bestimmen, werden zwei Optionspreise berechnet. Dabei bleiben alle Inputparameter bis auf den Wert des Basisinstruments unverändert. Dieser wird in beide Richtungen um einen vorgegebenen Wert *h* verändert.

Die numerische Approximation δ_{num} für das Delta der Option ist dann der Quotient der Differenz der Optionspreise und der Differenz der entsprechenden Werte des Basisinstruments und ist in der folgenden Formel zusammengefaßt:

$$\delta_{num} = \frac{op(S+h) - op(S-h)}{2h}. \tag{2.38}$$

Der Wert der angenommenen Veränderung *h* sollte vom Typ des Basisinstruments abhängig gemacht werden:

	Aktien	Fremdwährungen	Zinssätze	Anleihen
h	1	0,01	0,0001	1

Tabelle X: Angenommene Veränderung von *h* bei Delta

Vega

Um das Vega einer Option numerisch zu bestimmen, werden zwei Optionspreise berechnet. Dabei bleiben alle Inputparameter bis auf die Volatilität des Basisinstruments unverändert. Diese wird in beide Richtungen um einen vorgegebenen Wert *h* verändert.

Die numerische Approximation Λ_{num} für das Vega der Option ist dann der Quotient der Differenz der Optionspreise und der Differenz der entsprechenden Werte der Volatilität des Basisinstruments und ist in der folgenden Formel zusammengefaßt:

$$\Lambda_{num} = \frac{op(\sigma+h) - op(\sigma-h)}{2h}. \tag{2.39}$$

Der Wert der angenommenen Veränderung *h* sollte vom Typ des Basisinstruments abhängig gemacht werden:

	Aktien	Fremdwährungen	Zinssätze	Anleihen
h	0,01	0,01	0,01	0,01

Tabelle XI: Angenommene Veränderung von *h* bei Vega

Gamma

Das Gamma einer Option kann numerisch mit dem folgenden Differenzenquotienten approximiert werden:

$$\gamma_{num} = \frac{op(S+1{,}5h) - op(S+0{,}5h) - \left(op(S-0{,}5h) - op(S-1{,}5h)\right)}{2h^2}. \tag{2.40}$$

Dabei bleiben alle Inputparameter bis auf den Wert des Basisinstruments unverändert.

Der Wert der angenommenen Veränderung *h* sollte vom Typ des Basisinstruments abhängig gemacht werden:

	Aktien	Fremdwährungen	Zinssätze	Anleihen
h	1	0,01	0,0001	1

Tabelle XII: Angenommene Veränderung von *h* bei Gamma

2.4.3 Anhang: Numerische Differentiation

Wenn die Ableitungen einer Funktion analytisch nicht berechnet werden können, kann man versuchen, diese numerisch zu approximieren. Die Frage nach der Größe des Fehlers, der bei einer numerischen Approximation einer Ableitung entsteht, kann nur dann konkret beantwortet werden, falls die zugrundeliegende Funktion $f(x)$ genügend oft differenzierbar ist. Die prinzipielle Vorgangsweise bei der Abschätzung des Fehlers wird anhand eines Spezialfalls illustriert.

Die erste Ableitung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 kann numerisch durch

$$f'_A(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

oder durch

$$f'_B(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

approximiert werden.

Um zu entscheiden, welches der beiden Verfahren genauer ist, beginnt man die Fehleranalyse unter der Voraussetzung, daß die Funktion *f(x)* genügend oft differenzierbar ist und sich somit in eine Taylorreihe entwickeln läßt. Für die Taylorreihenentwicklung an den Stellen x_0+h und x_0-h ergibt sich:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

bzw.

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} - f'''(x_0)\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

Damit erhält man sofort die folgenden numerischen Ableitungen:

$$f'_A(x_0) = f(x_0) + f''(x_0)\frac{h}{2!} + \cdots$$

$$f'_B(x_0) = f(x_0) + f'''(x_0)\frac{h^2}{3!} + \cdots$$

Nach dem ersten Differentiationsverfahren ist der Fehler von **erster Ordnung** (*h* hat die Potenz 1), nach dem zweiten Differentiationsverfahren hingegen von **zweiter Ordnung** (*h* kommt mit der Potenz 2 vor). Somit ist das zweite numerische Differentiationsverfahren auf jeden Fall dem ersteren vorzuziehen. Nähere Details über die Fehleranalyse von numerischen Differentiationsverfahren findet man in Schwarz (1988). Vor allem für das Berechnen von Ableitungen höherer Ordnung ist es wichtig, das verwendete numerische Verfahren zur Berechnung der Ableitung sorgfältig auszuwählen, da ansonsten die berechneten Werte für die Ableitungen weit von den tatsächlichen Werten entfernt sein können.

2.5 Bestimmung der aktuellen Volatilität

Die Volatilität des Returns des Basisinstruments ist der einzige Inputparameter der bisher besprochenen Optionsbewertungsmodelle, der nicht direkt am Markt beobachtet werden kann. Eine möglichst exakte Bestimmung der Volatilität ist jedoch besonders wichtig, da die Volatilität der einzige Inputfaktor ist, der spezifische Informationen über das Basisinstrument der Option enthält. Deshalb ist es notwendig, diesen Parameter mittels der an den Finanzmärkten zur Verfügung stehenden Informationen möglichst genau zu ermitteln.

2.5.1 Historische Volatilität

Ein großes Problem bei der historischen Volatilität ist die Festlegung des „richtigen“ historischen Beobachtungszeitraums und des „richtigen“ Berechnungsintervalls. Bei der Festlegung des Beobachtungszeitraums und des Berechnungsintervalls kann es keine optimale Lösung geben, da einerseits die verwendeten Daten nicht allzu zeitfern sein dürfen, um eine möglichst aktuelle Volatilitätsschätzung zu erhalten, andererseits die statistische Aussagekraft der Volatilitätsschätzung umso geringer ist, je kleiner die Stichprobengröße ist. In der Praxis werden in der Regel Tageswerte (vereinzelt auch Wochen- oder Monatswerte) des Kurses S des Basisinstruments mit einem historischen Beobachtungszeitraum von 250 Tagen verwendet. Da dabei die Volatilität aus einer Stichprobe geschätzt wird, kommt die folgende Berechnungsformel zur Anwendung[11]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)\right)^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)\right]^2}\,, \tag{2.41}$$

wobei

σ die Volatilität des Basisinstruments und

S_i die i-te Beobachtung in der zugrundegelegten Stichprobe bezeichnet.

Abhängig von dem zugrundegelegten Berechnungsintervall erhält man Tages-, Wochen- oder Monatsvolatilitäten. Will man diese Volatilitätskennzahlen miteinander vergleichbar machen, muß man die jeweiligen Einzelergebnisse mit einem Annualisierungsfaktor auf jährliche Werte standardisieren. Dies ist jedoch nur unter der Voraussetzung zulässig, daß die einzelnen Beobachtungen Ziehungen von identisch verteilten Zufallsvariablen sind. In diesem Falle werden Tagesvolatilitäten durch die Multiplikation mit $\sqrt{250}$ und Wochen- bzw. Monatsvolatilitäten durch die Multiplikation mit $\sqrt{52}$ bzw. $\sqrt{12}$ annualisiert. An dieser Stelle wird ausdrücklich

[11] *Daneben gibt es eine Reihe anderer Verfahren, mit denen die historische Volatilität aus dem zur Verfügung stehenden Datenmaterial geschätzt werden kann, z.B. ein exponentiell gewichteter Schätzer.*

darauf hingewiesen, daß bei Optionsbewertungsmodellen in der Regel die annualisierte Volatilität als Input verwendet wird.

2.5.2 Implizite Volatilität

Im Gegensatz zur historischen Volatilität wird die implizite Volatilität aus einem einzigen Wert, nämlich dem aktuellen Wert der Option, berechnet. Zu diesem Zweck wird in einem gegebenen Optionsbewertungsmodell der Optionspreis als bekannt vorausgesetzt, wodurch sich die implizite Volatilität als einzige Unbekannte einer nicht-linearen Gleichung berechnen läßt. Als Optionspreis wird dabei der Marktpreis der Option, der sich aus Angebot und Nachfrage ergibt, verwendet. Zum Lösen der nicht-linearen Gleichung stehen verschiedene numerische Lösungsverfahren zur Verfügung, mit deren Hilfe die exakte Lösung genügend genau approximiert werden kann. Nachfolgend werden zwei gängige numerische Lösungsverfahren vorgestellt (siehe Schwarz 1988).

i. Newton-Raphson-Verfahren

Das Newton-Raphson-Verfahren ist ein effizientes Verfahren, um die implizite Volatilität einer Option zu berechnen. In der Regel reichen einige wenige Iterationsschritte, bis das Verfahren die gesuchte implizite Volatilität genügend genau approximiert. Das Iterationsverfahren läßt sich mathematisch wie folgt beschreiben:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i - \frac{p(\sigma_i) - p_M}{\partial p(\sigma_i)/\partial \sigma_i}, \tag{2.43}$$

wobei

$p(\sigma_i)$ den Optionspreis mit einer Volatilität σ_i und
p_M den Marktpreis der Option bezeichnet.

Die Iteration wird solange wiederholt, bis für eine vorgegebene Schranke ε das folgende Abbruchkriterium erfüllt ist:

$$\left| p_M - p(\sigma_{i+1}) \right| \leq \varepsilon .$$

Manaster und Koehler (1982) schlagen bei der Berechnung von impliziten Volatilitäten über das Black-Scholes-Modell folgenden Startwert für das Newton-Raphson-Verfahren vor:

$$\sigma_1 = \left[\left| ln(S/X) + rT \right| \frac{2}{T} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

ii. Intervallverfahren

Das Newton-Raphson-Verfahren kann nur dann für die Berechnung von impliziten Volatilitäten herangezogen werden, wenn es möglich ist, die erste partielle Ableitung des Optionspreises nach der Volatilität analytisch zu berechnen. Ist dies nicht möglich, wie es etwa bei amerikanischen Optionen der Fall ist, so muß auf andere numerische Lösungsverfahren zurückgegriffen werden. Beim Intervallverfahren wird ein Intervall $[\sigma_L, \sigma_H]$ bestimmt, in welchem die unbekannte implizite Volatilität jedenfalls enthalten sein muß. Dies ist dann der Fall, wenn der Marktpreis der Option die folgende Ungleichung erfüllt:

$$p(\sigma_L) \le p_M \le p(\sigma_H).$$

Das Anfangsintervall wird dann durch das folgende Iterationsverfahren sukzessive verkleinert, bis $|p_M - p(\sigma_{i+1})| \le \varepsilon$ erfüllt ist. Das Iterationsverfahren läßt sich mathematisch wie folgt beschreiben:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_L + (p_M - p(\sigma_L)) \frac{\sigma_H - \sigma_L}{p(\sigma_H) - p(\sigma_L)}, \tag{2.44}$$

wobei σ_L durch σ_{i+1} zu ersetzen ist, falls $p(\sigma_{i+1}) < p_M$ und σ_H durch σ_{i+1} zu ersetzen ist, falls $p(\sigma_{i+1}) > p_M$.

2.5.3 Preis- und Yield-Volatilitäten für Anleihen

Die Volatilitäten von Anleihen sind in vielen Fällen Yield-Volatilitäten und keine Preis-Volatilitäten. Diese beiden Volatilitäten lassen sich unter Zuhilfenahme der Duration ineinander umrechnen. Die Duration D eines Forward-Starting Bonds, der einer Bond-Option zugrundeliegt, ist gegeben durch:

$$D = -\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i C_i e^{-yt_i}}{\sum_{i=1}^{n} C_i e^{-yt_i}}. \tag{2.45}$$

Zwischen dem Bondpreis B, seinem Yield y und der Duration D besteht folgender Zusammenhang:

$$\frac{\Delta B}{B} = -Dy\frac{\Delta y}{y}.$$

Damit erhält man für die Preisvolatilität σ, die in das entsprechende Optionsbewertungsmodell eingeht, und der Yield-Volatilität σ_y den folgenden Zusammenhang:

$$\sigma = Dy\sigma_y. \tag{2.46}$$

In Verbindung mit Bond-Optionen ist somit immer darauf zu achten, daß für die Bewertung der Option die Preisvolatilität verwendet wird. Steht nur die Yield-Volatilität zur Verfügung, so muß diese, wie ausgeführt, in die Preisvolatilität transformiert werden.

3 Beispiele

Den folgenden Berechnungen liegt die Laufzeitbandmethode zugrunde. Die europäischen Optionen in den folgenden Beispielen werden mit dem Modell von Black-Scholes, die amerikanischen mit dem Binomialbaum bewertet. Die numerischen Sensitivitäten werden mit den Formeln (2.38) bis (2.40) berechnet.

3.1 Aktienoptionen

Beispiel 1:

Es wird ein europäischer Call mit Strike-Preis 30 EUR, der in 0,75 Jahren ausgeübt werden kann, auf 1.000 Aktien, die in EUR notieren, gekauft. Der aktuelle Marktpreis der Aktie beträgt 32 EUR. Die für die Bewertung der Option benötigten Marktdaten seien wie folgt gegeben:

Risikoloser Zinssatz: 0,03 p.a.
Volatilität: 0,30
Dividenden: 0,015

Die Bewertung der Option nach der Formel (2.5) liefert einen theoretischen Optionswert von 4.438 EUR. Gamma hat nach der Formel (2.22) einen Wert von 0,0434 und Vega beträgt nach (2.23) 10,0024.
Der Gamma-Effekt ist nach der Formel (1.1) 142 EUR und der Vega-Effekt nach der Formel (1.2) 750 EUR.

Beispiel 2:

Es wird ein amerikanischer Put mit Strike-Preis 32 EUR, der in 0,75 Jahren ausgeübt werden kann, auf 1.000 Aktien, die in EUR notieren, verkauft. Der aktuelle Marktpreis beträgt 32 EUR. Die für die Bewertung der Option benötigten Marktdaten seien wie folgt gegeben:

Risikoloser Zinssatz: 0,05 p.a.
Volatilität: 0,35
Dividenden: 0,04

Die Bewertung der Option nach der Formel (2.18) liefert einen theoretischen Optionswert von -3.659 EUR. Gamma hat nach (2.40) einen Wert von -0,0408 und Vega beträgt nach der Formel (2.39) -10,6403.
Der Gamma-Effekt ist nach der Formel (1.1) -134 EUR und der Vega-Effekt nach (1.2) -931 EUR.

3.2 Aktienindexoptionen

Beispiel 3:

Es werden 5 amerikanische Calls auf den FTSE mit Strike 6.000 Punkte, die innerhalb von 0,5 Jahren ausgeübt werden können, gekauft (1 Indexpunkt entspricht 10 GBP). Der aktuelle Index liegt bei 6.500 Punkten. Da es sich beim FT-SE um einen Performance-Index handelt, ist die Dividendenrendite des Index im Optionsmodell zu berücksichtigen. Die für die Bewertung der Option benötigten Marktdaten seien wie folgt gegeben:

Risikoloser Zinssatz: 0,053 p.a.
Volatilität: 0,35
Dividendenrendite: 0,045
FX-Kurs EUR/GBP: 1,4643

Die Bewertung der Option nach (2.17) liefert einen theoretischen Optionswert von 44.679 GBP (entspricht 65.424 EUR). Gamma hat nach (2.40) einen Wert von 0,0002 und Vega beträgt nach (2.39) 1.619,5214.
Der Gamma-Effekt ist nach (1.1) 1.545 GBP (entspricht 2.262 EUR) und der Vega-Effekt nach (1.2) 7.085 GBP (entspricht 10.375 EUR).

Beispiel 4:

Es wird ein europäischer Put auf den ATX mit Strike 1.150 Punkte, der in 0,75 Jahren ausgeübt werden kann, verkauft (1 Indexpunkt entspricht 7,2673 EUR). Der aktuelle Index liegt bei 1100 Punkten. Da es sich beim ATX um einen Kursindex handelt, ist die Dividendenrendite auf Null zu setzen. Die für die Bewertung der Option benötigten Marktdaten seien wie folgt gegeben:

Risikoloser Zinssatz: 0,03 p.a.
Volatilität: 0,21

Die Bewertung der Option nach (2.4) liefert einen theoretischen Optionswert von -679 EUR. Gamma hat nach (2.22) einen Wert von -0,0020 und Vega beträgt nach (2.23) -379,8752.
Der Gamma-Effekt ist nach der Formel (1.1) -56 EUR und der Vega-Effekt nach (1.2) -145 EUR.

3.3 FX-Optionen

Beispiel 5:
Es wird ein europäischer Call mit Strike-Preis 118 YEN/USD, der in 0,0833 Jahren ausgeübt werden kann, mit einem Volumen von 1 Mio. USD, gekauft. Der aktuelle Wechselkurs beträgt 119,8903 YEN/USD. Die für die Bewertung der Option benötigten Marktdaten seien wie folgt gegeben:

Inländischer Zinssatz (YEN): 0,0022 p.a.
Ausländischer Zinssatz (USD): 0,0488 p.a.
Volatilität: 0,23
FX-Kurs EUR/YEN: 0,007511

Die Bewertung der Option nach (2.7) liefert einen theoretischen Optionswert von 3.906.730 YEN (entspricht 29.343 EUR). Gamma hat nach (2.22) einen Wert von 0,0488 und Vega beträgt nach (2.23) 13,4368.
Der Gamma-Effekt ist nach (1.1) 561.064 YEN (entspricht 4.214 EUR) und der Vega-Effekt nach (1.2) 772.615 YEN (entspricht 5.803 EUR).

Beispiel 6:
Es wird ein amerikanischer Put mit Strike-Preis 1,65 USD/GBP, der innerhalb von 0,5 Jahren ausgeübt werden kann, mit einem Volumen von 1 Mio. GBP verkauft. Der aktuelle Wechselkurs beträgt 1,6140 USD/GBP. Die für die Bewertung der Option benötigten Marktdaten seien wie folgt gegeben:

Inländischer Zinssatz (USD): 0,0490 p.a.
Ausländischer Zinssatz (GBP): 0,039 p.a.
Volatilität: 0,15
FX-Kurs EUR/USD: 0,9117

Die Bewertung der Option nach (2.18) liefert einen theoretischen Optionswert von -83.375 USD (entspricht 76.013 EUR). Gamma hat nach (2.40) einen Wert von -2,2721 und Vega beträgt nach (2.39) -0,4429.
Der Gamma-Effekt ist nach (1.1) -4.735 USD (entspricht -4.317 EUR) und der Vega-Effekt nach (1.2) -16.608 USD (entspricht -15.141 EUR).

3.4 Zinsoptionen

3.4.1 Bondoptionen

Beispiel 7:

Es wird ein europäischer Call mit Strike 100, der in 1,6 Jahren ausgeübt werden kann, auf eine Anleihe mit einem Nominale von 10 Mio. EUR und einem Kupon von 5% gekauft. Der aktuelle Börsenkurs der Anleihe (Clean Price) beträgt 99. Die Kuponzahlungen erfolgen jährlich, wobei der nächste Kupon in einem halben Jahr fällig wird. Mit dem aktuellen Sechsmonats-Zinssatz von 3% p.a. (stetige Verzinsung) erhält man für die Anleihe einen Dirty-Preis von 99+4,93=103,93. Der Barwert der bis zur Ausübung der Option fälligen Kuponzahlungen beträgt, mit dem aktuellen 1,5-Jahreszinssatz von 3,2% p.a. (stetige Verzinsung) und dem aktuellen Sechsmonats-Zinssatz von 3% p.a. (stetige Verzinsung), 0,969 Mio. EUR. Damit ergibt sich mit dem 1,6-Jahreszinssatz von 3,22% p.a. (stetige Verzinsung) ein Forward-Wert der Anleihe zum Ausübungstag der Option von 99,21[12]. Ist der Strike-Preis der Dirty-Preis, der für die Anleihe bei Fälligkeit der Option zu zahlen ist, dann ist dies der entsprechende Input für das Optionsbewertungsmodell. Ist der Strike-Preis jedoch der Clean-Preis, der für die Anleihe bei Fälligkeit der Option gilt, dann sind die aufgelaufenen Stückzinsen beim Strike-Preis des Modells zu berücksichtigen. Die für die Bewertung der Option benötigten Marktdaten seien wie folgt gegeben:

Risikoloser Zinssatz: 0,0322 p.a.
Volatilität: 0,09

Die Bewertung der Option nach (2.9) liefert einen theoretischen Optionswert von 392.946 EUR. Gamma hat nach (2.22) einen Wert von 0,0335 und Vega beträgt nach (2.23) 47,5462.
Der Gamma-Effekt ist nach (1.1) 23.216 EUR und der Vega-Effekt nach (1.1) 106.979 EUR.

Beispiel 8:

Es wird ein amerikanischer Put mit Strike 99, der innerhalb von einen Jahr ausgeübt werden kann, auf eine Anleihe mit einem Nominale von 20 Mio. GBP und einem Kupon von 7% verkauft. Der aktuelle Forward-Wert der Anleihe wird wie im vorangegangenen Beispiel beschrieben berechnet und beträgt 99,8. Die für die Bewertung der Option benötigten Marktdaten seien wie folgt gegeben:

[12] *Man kann den Forward-Wert der Anleihe auch berechnen, indem man den Barwert aller nach dem Ausübungstag der Option anfallenden Zahlungen zum Ausübungstag der Option berechnet.*

Risikoloser Zinssatz (GBP): 0,052 p.a.
Volatilität: 0,11
FX-Kurs EUR/GBP: 1,4643

Die Bewertung der Option nach (2.18) liefert einen theoretischen Optionswert von -762.533 GBP (entspricht -1.116.577 EUR). Gamma hat nach (2.40) einen Wert von -0,0342 und Vega beträgt nach (2.39) -37,9291.
Der Gamma-Effekt ist nach (1.1) -35.996 GBP (entspricht -52.709 EUR) und der Vega-Effekt nach (1.2) -208.610 GBP (entspricht -305.467 EUR).

3.4.2 Optionen auf Zins-Futures[13]

Beispiel 9:
Es wird ein amerikanischer Put mit Strike 0,043, der innerhalb von 0,095 Jahren ausgeübt werden kann, auf einen Dreimonats-Zinsfuture mit einem Nominale von 1 Mio. GBP und einer Restlaufzeit von 0,15 Jahren gekauft. Der aktuelle Forward-Zinssatz des Futures beträgt 0,045 p.a. Die für die Bewertung der Option benötigten Marktdaten seien wie folgt gegeben:

Risikoloser Zinssatz (GBP): 0,038 p.a.
Volatilität: 0,18
FX-Kurs GBP/EUR: 1,4643

Die Bewertung der Option nach (2.18) liefert einen theoretischen Optionswert von 70 GBP (entspricht 102 EUR). Das Zinsgamma hat nach (2.40) einen Wert von 27,4902 und Vega beträgt nach (2.39) 0,0009.
Der Gamma-Effekt ist nach (1.1) 1.374 GBP (entspricht 2.013 EUR) und der Vega-Effekt nach (1.2) 43 GBP (entspricht 63 EUR).

Beispiel 10:
Es wird ein europäischer Call mit Strike 0,05, der in 0,095 Jahren ausgeübt werden kann, auf einen Dreimonats-Zinsfuture mit einem Nominale von 1 Mio. GBP und einer Restlaufzeit von 0,15 Jahren, verkauft. Der aktuelle Forward-Zinssatz des Futures beträgt 0,055 p.a. Die für die Bewertung der Option benötigten Marktdaten seien wie folgt gegeben:

Risikoloser Zinssatz (GBP): 0,048 p.a.
Volatilität: 0,18
FX-Kurs GBP/EUR: 1,4643

[13] *Ökonomisch gesehen entspricht eine Option auf einen Zins-Future einem Caplet und sollte daher wie ein Caplet behandelt werden.*

Die Bewertung der Option nach (2.11) liefert einen theoretischen Optionswert von -1.240 GBP (entspricht -1.816 EUR). Das Zinsgamma hat nach (2.32) einen Wert von -6,9936 und Vega beträgt nach (2.33) -0,0004.
Der Gamma-Effekt ist nach (1.1) -350 GBP (entspricht -512 EUR) und der Vega-Effekt nach (1.2) -16 GBP (entspricht -24 EUR).

3.4.3 Caps

Beispiel 11:

Es wird ein (europäischer) Cap auf den Sechsmonats-LIBOR als Referenzzinssatz mit Strike 0,055 p.a, der eine Restlaufzeit von 5 Jahren hat, mit einem Nominale von 10 Mio. EUR gekauft. Die aktuellen Forward-Zinssätze für die Laufzeiten der einzelnen Caplets sowie deren Volatilitäten und risikolosen Zinssätze sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Caplet 1	Caplet 2	Caplet 3	Caplet 4	Caplet 5	Caplet 6	Caplet 7	Caplet 8	Caplet 9
Vorlaufzeit des Caplets	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Forward-Zinssatz p.a.	0,034	0,0416	0,0466	0,054	0,0601	0,0635	0,0687	0,0694	0,0736
Volatilität des Forward-Zinssatzes	0,15	0,19	0,19	0,19	0,19	0,17	0,17	0,17	0,17
Risikoloser Zinssatz f. d. Ende der Zinsperiode p.a.	0,0344	0,0369	0,0393	0,0424	0,0453	0,0478	0,0504	0,0525	0,0546

Tabelle XIII

Die Bewertung der einzelnen Caplets nach (2.11), das Zinsgamma und das Vega jedes Caplets nach den Formeln (2.32) und (2.33) sowie die dazugehörigen Effekte sind in der untenstehenden Tabelle zusammengefaßt:

	Caplet 1	Caplet 2	Caplet 3	Caplet 4	Caplet 5	Caplet 6	Caplet 7	Caplet 8	Caplet 9
Preis in EUR	0	1.346	7.593	24.014	42.425	50.719	67.379	68.960	81.099
Zinsgamma	0,0023	9,2849	14,2421	12,3419	8,7371	7,3781	5,1659	4,6376	3,5133
Vega	0	0,0031	0,0088	0,0137	0,0150	0,0152	0,0145	0,0152	0,0146
Angenommene Zinssatzänderung	0,01	0,009	0,009	0,008	0,008	0,0075	0,0075	0,0075	0,0075
Gamma-Effekt in EUR	1	3.760	4.557	3.949	2.457	2.075	1.453	1.136	861
Vega-Effekt in EUR	0	1.450	4.187	6.496	7.120	6.448	6.165	6.455	6.188

Tabelle XIV

3.4.4 Floors

Beispiel 12:

Es wird ein Floor auf den Sechsmonats-LIBOR als Referenzzinssatz mit Strike 0,05 p.a., der eine Restlaufzeit von 5 Jahren hat, mit einem Nominale von 20 Mio. USD gekauft. Der aktuelle FX-Kurs beträgt 0,9117 EUR/USD. Die aktuellen Forward-Zinssätze für die Laufzeiten der einzelnen Floorlets sowie deren Volatilitäten und risikolosen Zinssätze sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Floorlet 1	Floorlet 2	Floorlet 3	Floorlet 4	Floorlet 5	Floorlet 6	Floorlet 7	Floorlet 8	Floorlet 9
Vorlaufzeit des Floorlets	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Forward-Zinssatz p.a.	0,034	0,0416	0,0466	0,054	0,0601	0,0635	0,0687	0,0694	0,0736
Volatilität des Forward-Zinssatzes	0,15	0,19	0,19	0,19	0,19	0,17	0,17	0,17	0,17
Risikoloser Zinssatz f. d. Ende der Zinsperiode p.a.	0,0344	0,0369	0,0393	0,0424	0,0453	0,0478	0,0504	0,0525	0,0546

Tabelle XV

Die Bewertung der einzelnen Floorlets nach (2.12), das Zinsgamma und das Vega jedes Floorlets nach den Formeln (2.32) und (2.33) sowie die dazugehörigen Effekte sind in der untenstehenden Tabelle zusammengefaßt:

	Floorlet 1	Floorlet 2	Floorlet 3	Floorlet 4	Floorlet 5	Floorlet 6	Floorlet 7	Floorlet 8	Floorlet 9
Preis in EUR	-140.963	-79.078	-53.751	-31.026	-21.540	-14.974	-11.509	-12.742	-10.897
Zinsgamma	-0,0871	-16,3158	-16,7162	-11,3210	-7,2135	-5,7002	-3,8188	-3,5097	-2,6129
Vega	0,000	-0,0054	-0,0103	-0,0125	-0,0124	-0,0117	-0.0107	-0,0115	-0,0108
Angenommene Zinssatzänderung	0,01	0,009	0,009	0,008	0,008	0,0075	0,0075	0,0075	0,0075
Gamma-Effekt (EUR)	-79	-12.049	-9.754	-6.606	-3.699	-2.923	-1.958	-1.568	-1.167
Vega-Effekt (EUR)	-5	-4.646	-8.960	-10.865	-10.719	-9.084	-8.311	-8.908	-8.391

Tabelle XVI

3.4.5 Swaptions

Beispiel 13:

Es wird eine europäische Option auf einen 10-jährigen Receiver-Swap mit Strike 0,045 p.a., die in 3,7 Jahren ausgeübt werden kann, mit einem Nominale von 5 Mio. EUR gekauft. Die Zahlungen erfolgen halbjährlich. Der aktuelle Forward-Sechsmonats-Zinssatz beträgt 0,043 p.a. Der Faktor A aus der Formel (2.14) hat aufgrund der angenommenen Zinskurve den Wert 3,793. Die Volatilität des Forward-Zinssatzes beträgt 0,11.

Die Bewertung der Option nach der Formel (2.14) liefert einen theoretischen Optionswert von 90.890 EUR. Das Zinsgamma hat nach der Formel (2.36) einen Wert von 165,3421, und Vega beträgt nach (2.37) 0,1244.
Der Gamma-Effekt ist nach (1.1) 14.881 EUR und der Vega-Effekt nach (1.2) 17.109 EUR.

Beispiel 14:

Es wird eine europäische Option auf einen 5-jährigen Payer-Swap mit Strike 0,08 p.a., die in 2 Jahren ausgeübt werden kann, mit einem Nominale von 20 Mio. EUR verkauft. Die Zahlungen erfolgen jährlich. Der aktuelle Forward-Einjahreszinssatz beträgt 0,0745 p.a. Der Faktor A aus der Formel (2.13) hat aufgrund der angenommenen Zinskurve den Wert 4,956. Die Volatilität des Forward-Zinssatzes beträgt 0,115.

Die Bewertung der Option nach der Formel (2.13) liefert einen theoretischen Optionswert von -270.393 EUR. Das Zinsgamma hat nach der Formel (2.36) einen Wert von -153,1272 und Vega beträgt nach (2.37) -0,1955.
Der Gamma-Effekt ist nach (1.1) -75.032 EUR und der Vega-Effekt nach (1.2) -112.399 EUR.

4 Musterportfolio für die Laufzeitbandmethode

Das Musterportfolio setzt sich aus den Positionen der Beispiele aus dem Abschnitt 3 zusammen. In der folgenden Tabelle sind die einzelnen Gamma- und Vega-Effekte sowie die Risikokategorien nochmals zusammengefaßt:

	Gamma-Effekt (EUR)	Vega-Effekt (EUR)	Risikokategorie
Beispiel 1	142	750	Aktien/EUR
Beispiel 2	-134	-931	Aktien/EUR
Beispiel 3	2.262	10.375	Aktien/GBP
Beispiel 4	-56	-145	Aktien/EUR
Beispiel 5	4.214	5.803	YEN/USD
Beispiel 6	-4.317	-15.141	USD/GBP
Beispiel 7	23.216	106.979	Lfzb. 10/EUR
Beispiel 8	-52.709	-305.467	Lfzb. 9/GBP
Beispiel 9	2.013	63	Lfzb. 3/GBP
Beispiel 10	-512	-24	Lfzb. 3/GBP
Beispiel 11 (Caplet 1)	1	0	Lfzb. 4/EUR
Beispiel 11 (Caplet 2)	3.760	1.450	Lfzb. 5/EUR
Beispiel 11 (Caplet 3)	4.557	4.187	Lfzb. 6/EUR
Beispiel 11 (Caplet 4)	3.949	6.496	Lfzb. 6/EUR
Beispiel 11 (Caplet 5)	2.457	7.120	Lfzb. 7/EUR
Beispiel 11 (Caplet 6)	2.075	6.448	Lfzb. 7/EUR
Beispiel 11 (Caplet 7)	1.453	6.165	Lfzb. 8/EUR
Beispiel 11 (Caplet 8)	1.136	6.455	Lfzb. 9/EUR
Beispiel 11 (Caplet 9)	861	6.188	Lfzb. 9/EUR
Beispiel 12 (Floorlet 1)	-79	-5	Lfzb. 4/USD
Beispiel 12 (Floorlet 2)	-12.049	-4.646	Lfzb. 5/USD
Beispiel 12 (Floorlet 3)	-9.754	-8.960	Lfzb. 6/USD
Beispiel 12 (Floorlet 4)	-6.606	-10.865	Lfzb. 6/USD
Beispiel 12 (Floorlet 5)	-3.699	-10.719	Lfzb. 7/USD
Beispiel 12 (Floorlet 6)	-2.923	-9.084	Lfzb. 7/USD
Beispiel 12 (Floorlet 7)	-1.958	-8.311	Lfzb. 8/USD
Beispiel 12 (Floorlet 8)	-1.568	-8.908	Lfzb. 9/USD
Beispiel 12 (Floorlet 9)	-1.167	-8.391	Lfzb. 9/USD
Beispiel 13	14.881	17.109	Lfzb. 11/EUR
Beispiel 14	-75.032	-112.399	Lfzb. 9/EUR

Tabelle XVII: Gamma- und Vega-Effekte der Einzelpositionen

Nettet man die einzelnen Gamma- und Vega-Effekte innerhalb der Risikokategorien, erhält man die folgenden Netto-Effekte pro Risikokategorie:

Risikokategorie	Gamma-Effekt	Vega-Effekt
Aktien/EUR	-48	-326
Aktien/GBP	2.262	10.375
YEN/USD	4.214	5.803
USD/GBP	-4.317	-15.141
Lfzb. 3/GBP	1.501	39
Lfzb. 9/GBP	-52.709	-305.467
Lfzb. 4/EUR	1	0
Lfzb. 5/EUR	3.760	1.450
Lfzb. 6/EUR	8.506	10.683
Lfzb. 7/EUR	4.532	13.568
Lfzb. 8/EUR	1.453	6.165
Lfzb. 9/EUR	-73.035	-99.756
Lfzb. 10/EUR	23.216	106.979
Lfzb. 11/EUR	14.881	17.109
Lfzb. 4/USD	-79	-5
Lfzb. 5/USD	-12.049	-4.646
Lfzb. 6/USD	-16.360	-19.825
Lfzb. 7/USD	-6.622	-19.803
Lfzb. 8/USD	-1.958	-8.311
Lfzb. 9/USD	2.735	-17.299

Tabelle XVIII: Genettete Effekte pro Risikokategorie

Daraus ergibt sich für das gesamte Portfolio ein Gamma-Effekt von 169.913 EUR und ein Vega-Effekt von 662.750 EUR.

5 Literaturverzeichnis

Barone-Adesi G. und Whaley R. E. (1987): Efficient Analytic Approximation of American Option Values, *Journal of Finance* **42**(2), 301-320

Basler Ausschuß für Bankenaufsicht (1996): *Änderung der Eigenkapitalvereinbarung zur Einbeziehung von Marktrisiken*

Bestimmungen des österreichischen Bankwesengesetzes i.d.F. BGBl. Nr. 753/1996 und Nr. 757/1996

Black F. (1976): The Pricing of Commodity Contracts, *Journal of Financial Economics* **3**, 167-179

Black F. und Scholes M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* **81**, 637-654

Breuer T., Coosmann G., de Raaij G., Gaal A., Krenn G., Laszlo R., Plank M. und Raunig B. (1999): *Prüfung des Standardverfahrens*, Band 2 der Leitfadenreihe zum Marktrisiko, Publikation der Oesterreichischen Nationalbank

Coosmann G. und Laszlo R. (1999): *Allgemeines Marktrisiko bei Schuldtiteln* , 2. überarbeitete und erweiterte Auflage, Band 1 der Leitfadenreihe zum Marktrisiko, Publikation der Oesterreichischen Nationalbank

Cox J. C., Ross S. A. und Rubinstein M. (1979): Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics* **7**, 229-263

Garman M. B. und Kohlhagen S. W. (1983): Foreign Currency Option Values, *Journal of International Money and Finance* **2**, 231-237

Haug E.G. (1998): *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*, McGraw-Hill, New York

Heuser H. (1990): *Lehrbuch der Analysis*, Teil 2, 8. Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart

Hull J. C. (1997): *Options, Futures, and Other Derivatives*, 3rd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River NJ

Manaster S. und Koehler G. (1982): The Calculation of Implied Variances from the Black-Scholes Model, *Journal of Finance* **37**(1), 227-230

Merton R. C. (1973): Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* **4**, 141-183

Plank M. (1999): *Sonstige Risiken des Wertpapier-Handelsbuches*, Band 6 der Leitfadenreihe zum Marktrisiko, Publikation der Oesterreichischen Nationalbank

Schwarz A. R. (1988): *Numerische Mathematik*, B. G. Teubner, Stuttgart

Verordnung des Bundesministers für Finanzen zur Durchführung des Bankwesengesetzes hinsichtlich sonstiger, mit Optionen verbundener Risiken (Optionsrisikoverordnung), BGBl. Nr. 11/1998